

## Тема 3 Растяжение и сжатие

### Основные понятия

Под растяжением понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – *продольная сила*  $N_z$ , а все прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня.

*Продольной осью* стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 3.1.

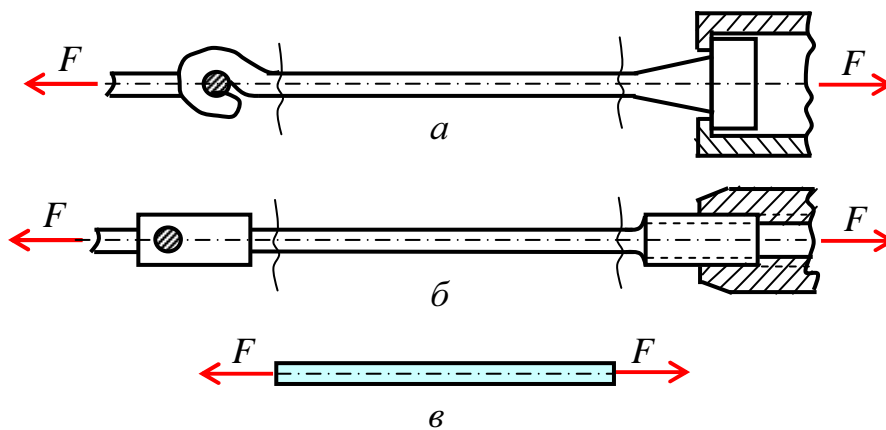


Рис. 3.1

Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую  $F$ , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 3.1, а, б) оказывается единой (рис. 3.1, в) согласно принципу Сен – Венана.

Если воспользоваться методом сечений (рис. 3.2), то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы  $N_z$ , равные силе  $F$  (рис. 3.2, б).

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы  $N_z$ . При растяжении нормальная сила  $N_z$  направлена от сечения (рис. 3.2, б), а при сжатии – к сечению.

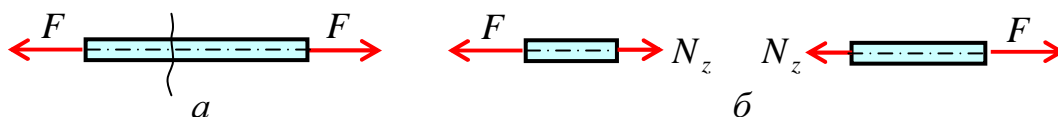


Рис. 3.2

Растягивающие продольные силы принято считать положительными (рис. 3.3, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 3.3, б).

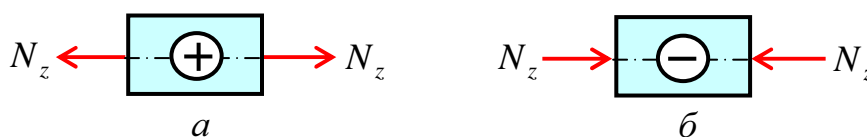


Рис. 3.3

Вместе с тем между растяжением и сжатием могут обнаружиться и качественные различия, как, например, при изучении процессов разрушения материала или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

При расчете стержней, испытывающий деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от  $N_z$ ), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

### Продольная сила

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется *эпюрой продольных сил* (эп.  $N_z$ ). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Продольные силы ( $N_z$ ), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, жестко заземленный правым концевым сечением и нагруженный заданной внешней сосредоточенной нагрузкой  $F$  и распределенной  $q$  (рис. 3.4, а).

Прежде всего определим опорную реакцию  $R_1$ , задавшись ее направлением вдоль оси  $z$ .

$$\Sigma F_z = 0, \quad -R_1 - 22 + 24 \cdot 0.6 = 0, \quad R_1 = -7.6 \text{ кН}.$$

Знак минус говорит о том, что действительное направление опорной реакции  $R_1$  противоположно показанному на рис. 3.4, а. Исправляем его и в дальнейших расчетах знак минус у опорной реакции  $R_1$  не учитываем (рис. 3.4, в, г).

Под *участком* будем понимать часть стержня, на которой  $N_z$  представляется некоторым аналитическим выражением. На другом участке  $N_z$  будет определяться другой функцией.

Границами участка являются начало и конец стержня, сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки, начинается и заканчивается распределенная нагрузка.

В нашем случае стержень разбивается на два участка. В пределах первого участка мысленно разрежем стержень на две части нормальным сечением (рис. 3.4, б, в).

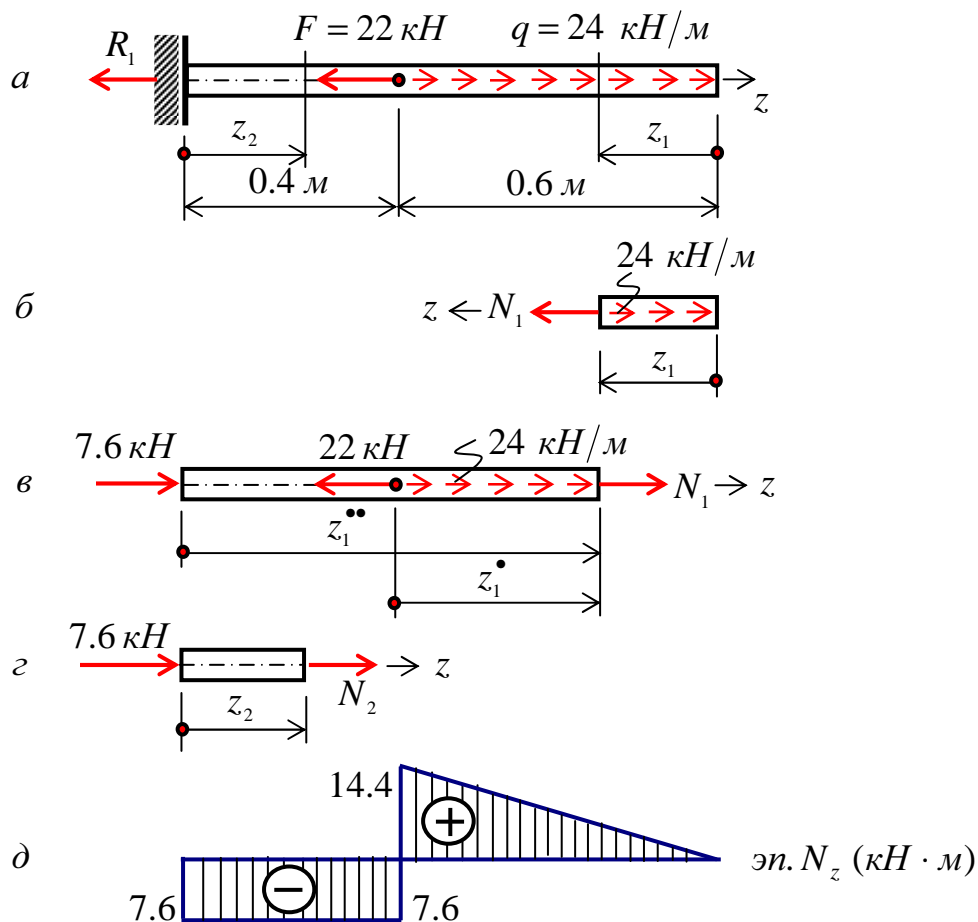


Рис. 3.4

Направления продольных сил (рис. 3.4, б – г) приняты в предположении, что они являются растягивающими (т. е. положительными). Если в результате расчета значение  $N_i$  получится со знаком «минус», то это будет означать, что в действительности стержень в этом сечении сжат.

Поскольку обе части стержня являются равноправными, то  $N_1$  на первом участке в сечении, определяемом координатой  $z_1$ , можно определить рассматривая равновесие его правой (рис. 3.4, б) либо левой (рис. 3.4, в) частей.

В нашем случае для определения  $N_1$  предпочтительнее рассмотреть равновесие правой части – к ней приложено меньше сил (рис. 3.4, б). Начало координат совмещаем с правым концевым сечением первого участка. Ось  $z$  направляем налево. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси  $0 \leq z_1 \leq 0.6 \text{ м}$ . Спроектируем все силы, действующие на правую часть, на продольную ось.

$$\Sigma F_z = 0, \quad N_1 - 24 \cdot z_1 = 0, \quad N_1 = 24 \cdot z_1, \quad N_1(0) = 0, \quad N_1(0.6) = 14.4 \text{ кН}.$$

Поскольку функция  $N_1 = 24 \cdot z_1$  получилась линейная, то для построения графика ее изменения вдоль продольной оси (эн.  $N_z$ ) достаточно вычислить значения продольной силы на границах первого участка, отложить их перпендикулярно продольной оси вверх (стержень растянут) и провести через них прямую линию (рис. 3.4, д).

Таким образом, в пределах первого участка стержень растянут и нормальная сила изменяется по линейному закону.

Этот же результат можно получить, рассматривая равновесие левой части стержня. Здесь при выборе системы координат рассмотрим два варианта. При первом варианте начало координат совмещаем с левым концевым сечением второго участка. Ось  $z$  направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси  $0.4 \text{ м} \leq z_1^{**} \leq 1.0 \text{ м}$ ,  
 $\Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7.6 - 22 + 24 \cdot (z_1^{**} - 0.4) = 0, \quad N_1 = 24 - 24 \cdot z_1^{**},$   
 $N_1(0.4) = 14.4 \text{ кН}, \quad N_1(1.0) = 0.$

Во втором варианте введем скользящую систему координатных осей. Начало координат совмещаем с левым концевым сечением первого участка. Ось  $z$  направляем направо. Имеем

$$0 \leq z_1^{\bullet} \leq 0.6 \text{ м}, \quad \Sigma F_z = 0, \quad N_1 + 7.6 - 22 + 24 \cdot z_1^{\bullet} = 0, \quad N_1 = 14.4 - 24 \cdot z_1^{\bullet},$$

$$N_1(0) = 14.4 \text{ кН}, \quad N_1(0.6) = 0.$$

Заметим, что при выборе скользящей системы координат, функция  $N_1 = f(z, q)$  меняется от нуля, что делает последующие расчеты менее трудоемкими.

Сравнивая все три варианта определения  $N_1$ , приходим к выводу, что когда мы оставляем ту часть стержня, к которой приложено меньше внешних нагрузок, то расчеты оказываются более простыми.

При некотором навыке можно сразу составить выражение для  $N_1$ , не изображая отдельные части бруса, на которые он расчленяется поперечными сечениями (рис. 3.4, б, в). Например,

$$\text{при } 0 \leq z_1 \leq 0.6 \text{ м}, \quad N_1 = 24 \cdot z_1;$$

$$\text{при } 0.4 \text{ м} \leq z_1^{**} \leq 1.0 \text{ м}, \quad N_1 = -7.6 + 22 - 24 \cdot (z_1^{**} - 0.4);$$

$$\text{при } 0 \leq z_1^{\bullet} \leq 0.6 \text{ м}, \quad N_1 = -7.6 + 22 - 24 \cdot z_1^{\bullet}.$$

Таким образом, на основании метода сечений *продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраичес-*

кой сумме проекций внешних сил, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения, на его продольную ось.

Причем проекция внешней силы берется со знаком плюс, если сила растягивает часть стержня от точки ее приложения до рассматриваемого сечения и, наоборот, со знаком минус – если сжимает.

Осталось определить значение продольной силы  $N_2$  в произвольном сечении, определяемом координатой  $z_2$ , на втором участке (рис. 3.4, г). Так как продольная сила  $N_2$  численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к стержню слева от сечения (рассматриваем равновесие левой части стержня), то  $N_2 = -7.6 \text{ кН}$  (реакция  $R_1 = 7.6 \text{ кН}$  сжимает часть стержня длиной  $z_2$ ). Здесь принимаем скользящую систему координат, с началом в левом концевом сечении второго участка. Ось  $z$  направляем направо.

Эюра  $N_z$  на втором участке представлена на рис. 5. 4, д в виде прямоугольника со знаком минус, поскольку  $N_2 = -7.6 \text{ кН} = \text{const}$ . Т. о., в пределах второго участка стержень претерпевает сжатие постоянной нормальной силой.

Каждая ордината *эп.*  $N_z$  (рис. 3.4, д) в принятом масштабе равна величине продольной силы, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

Видно, что на участке между точками приложения сосредоточенных сил  $R_1$  и  $F$  продольная сила имеет постоянное значение, а на участке, где приложена распределенная внешняя нагрузка, меняется по линейному закону (рис. 3.4, д).

Характерно, что скачки на *эп.*  $N_z$  обусловлены наличием в соответствующих сечениях сосредоточенных сил  $R_1$  и  $F$ .

## Напряжения и деформации

Переходя к изучению деформации растяжения (сжатия), ограничимся рассмотрением стержней постоянного поперечного сечения с прямолинейной осью, т. е. призматических стержней

Для того, чтобы сформулировать предпосылки теории растяжения (сжатия) призматического стержня, обратимся к эксперименту. Представим себе стержень, изготовленный из какого – либо податливого материала (например, резины), на боковую поверхность которого нанесена система продольных и поперечных рисок (рис. 3.5, а).

Эта ортогональная система рисок остается таковой и после приложения растягивающей нагрузки, за исключением небольшого участка вблизи точки приложения силы  $F$ , который согласно принципу Сен – Венана из рассмотрения можно исключить (рис. 3.5, б).

Поскольку поперечные риски являются следами поперечных сечений на поверхности стержня и остаются прямыми и перпендикуляр-

ными к оси стержня, то это свидетельствует о выполнении *гипотезы плоских сечений* (Бернулли).

С учетом *гипотезы об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон* ( $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ ) приходим к выводу, что деформация растяжения стержня сводится к одноосному растяжению его продольных волокон, и в поперечном сечении стержня возникают лишь нормальные напряжения  $\sigma_z \neq 0$ .

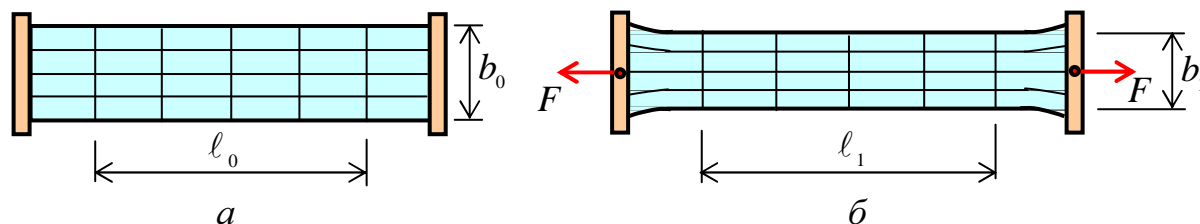


Рис. 3.5

Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а, следовательно, и связанных с ними касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях стержня.

Как показывает эксперимент (рис. 3.5), при растяжении стержня его длина увеличивается, а размеры его поперечного сечения уменьшаются. Изменение его длины  $\Delta l = l_1 - l_0$  называется *абсолютной продольной деформацией* или удлинением. В большинстве случаев оно мало по сравнению с его первоначальной длиной  $l_0$  ( $\Delta l \ll l_0$ ).

*Относительную продольную деформацию* определим как отношение

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{np} = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Аналогично, изменение размеров его поперечного сечения будем называть *абсолютной поперечной деформацией* ( $\Delta b = b_1 - b_0$ ,  $\Delta b < 0$ ), а  $\varepsilon_{non} = \Delta b / b_0$  – *относительной поперечной деформацией*.

Явление уменьшения размеров поперечного сечения стержня при растяжении, а при сжатии – увеличения, получило название *эффекта Пуассона*. Он оценивается при помощи коэффициента поперечной деформации (*коэффициента Пуассона*), который равен отношению относительной поперечной деформацией к относительной продольной, взятому по абсолютной величине

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon_{np}} \right|.$$

В сопротивлении материалов *коэффициент Пуассона*  $\mu$ , наряду с *модулем продольной упругости материала стержня*  $E$ , характеризует упругие свойства материала.

Величина коэффициента Пуассона  $\mu$  определяется экспериментально и для различных материалов имеет значения от нуля (для пробки) и до величины близкой к 0.5 (для пластика).

Таким образом, теория растяжения (сжатия) призматического стержня, основывается на следующих предположениях:

1. справедлива гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли,
2. материал стержня подчиняется закону Гука,
3. по ширине стержня напряженно-деформированное состояние не меняется.

Поскольку задача по определению напряжений является статически неопределимой, т. е. неизвестных больше чем независимых уравнений равновесия, то для получения полной системы уравнений необходимо рассмотреть кроме статической также геометрическую и физическую стороны задачи.

*Статическая сторона задачи.*

Продольная сила  $N_z$ , возникающая в поперечном сечении стержня, представляет собой статический эквивалент внутренних нормальных сил (рис. 3.6, а), распределенных по площади сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями (рис. 3.6, б) зависимостью

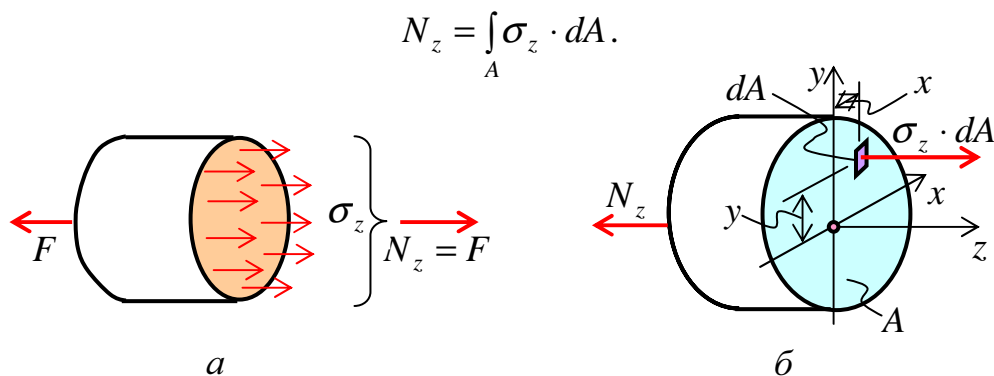


Рис. 3.6

Это соотношение является уравнением равновесия и нормальное напряжение  $\sigma_z$ , которое в общем случае является функцией координат  $x$  и  $y$ , не может быть найдено из одного лишь уравнения равновесия. Таким образом, задача определения напряжений даже в самом простом случае деформирования стержня (растяжения или сжатия) оказывается статически неопределимой.

*Геометрическая сторона задачи.*

Необходимое для решения этой задачи геометрическое уравнение вытекает из гипотезы плоских сечений. Поскольку поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси стержня, в процессе деформирования лишь поступательно перемещаются вдоль оси

стержня (что приводит к одинаковому удлинению всех продольных волокон), то приходим к уравнению

$$\varepsilon_z = const .$$

*Физическая сторона задачи.*

Величина напряжений, на основании закона Гука, прямо пропорциональна относительным продольным деформациям

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z .$$

*Синтез.*

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили совместную систему из трех уравнений (условие равновесия, геометрическое и физическое уравнения):  $N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA$ ,  $\varepsilon_z = const$ ,  $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$ , решая которую получаем все необходимые формулы для определения напряжений и деформаций, геометрических характеристик, которые соответствуют деформации растяжения.

Если  $\varepsilon_z = const$ , то ввиду однозначности связи  $\sigma_z$  и  $\varepsilon_z$  (для линейно - упругого материала это – закон Гука:  $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$ ) вытекает, что  $\sigma_z = const$ .

$$\text{Отсюда } N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = \sigma_z \cdot \int_A dA = \sigma_z \cdot A, \text{ или}$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} .$$

Таким образом, при растяжении (сжатии) призматического стержня нормальные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, а касательные напряжения в сечениях отсутствуют, что является следствием гипотезы плоских сечений.

Указанное, несмотря на, казалось бы, очевидность и простоту, является фундаментальным результатом, справедливым, строго говоря, лишь для призматического стержня. Однако на практике его используют и для приближенной оценки  $\sigma_z$  в стержнях переменного сечения при условии достаточно плавного изменения площади поперечного сечения вдоль продольной оси.

Осталось определить продольные деформации  $\varepsilon_z$ . С учетом полученных зависимостей закон Гука принимает следующий вид:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \text{ или } \frac{N_z}{A} = E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ или } \Delta \ell = \frac{N_z \cdot \ell}{E \cdot A} .$$

Произведение  $EA$  принято называть *жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии)*, так как удлинение обратно пропорционально  $EA$ .

Формула для удлинения стержня  $\Delta \ell$  применима только в случае, когда по длине стержня ни жесткость поперечного сечения, ни продольная сила не изменяются ( $EA = const$ ,  $N_z = const$ ). Удлинение стержня со

ступенчатым изменением  $EA$  и  $N_z$  может быть определено как сумма удлинений ступеней, у которых  $EA$  и  $N_z$  постоянны.

В случае, когда  $EA$  и  $N_z$  меняются по длине стержня  $\ell$  непрерывно и их можно считать постоянными лишь в пределах ступеней длиной  $dz$ , обобщая предыдущий случай, получаем

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N_z \cdot dz}{E \cdot A}.$$

### Условия прочности и жесткости

По условию прочности для стержня из пластического материала (т. е. материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие) наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_{\max}$  не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений на растяжение  $[\sigma]$ :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{\max N_z}{A} \leq [\sigma].$$

Напряжение  $\sigma_z$  в этом условии подставляется по модулю, так как знак  $\sigma_z$  в этом случае роли не играет.

Для стержней из хрупких материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, знак напряжений имеет принципиальное значение, и условие прочности приходится формулировать отдельно для растяжения и сжатия:

$$\sigma_{\max}^{раст} \leq [\sigma_{раст}] \quad \text{или} \quad \frac{\max N_z^{раст}}{A} \leq [\sigma_{раст}]; \quad \sigma_{\max}^{сж} \leq [\sigma_{сж}], \quad \frac{\max N_z^{сж}}{A} \leq [\sigma_{сж}],$$

где  $[\sigma_{раст}]$  и  $[\sigma_{сж}]$  допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Условие жесткости при растяжении имеет вид:

$$\Delta\ell \leq [\Delta\ell] \quad \text{или} \quad \text{в относительном виде} \quad \varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon], \quad \text{последнее можно представить в виде} \quad \frac{\max N_z}{E \cdot A} \leq [\varepsilon].$$

### Типы задач

В практике инженерных расчетов обычно решаются три основные задачи. Это *проверочный расчет (проверка прочности)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности или жесткости. То есть, проверочный расчет заключается в том, что определяется фактический запас прочности стержня  $n$  и сравнивается с нормативным коэффициентом запаса прочности  $[n]$ :

$$n \geq [n] \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{\max}} \geq [n], \quad \text{где } \sigma_{пред} \text{ – предельное (или опасное) напряжение,}$$

т. е. напряжение, вызывающее отказ элемента конструкции (напомним,

что, например, для стержня из пластичного материала это – предел текучести  $\sigma_m$  или условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ ).

*Подбор сечения (проектировочный расчет).* По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала  $A \geq \frac{\max N_z}{[\sigma]}$ .

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности  $\max N_z \leq [\sigma] \cdot A$  или жесткости  $\max N_z \leq [\varepsilon] \cdot E \cdot A$ .

### Определение перемещений

С продольными деформациями стержня при растяжении (сжатии) связаны продольные перемещения его сечений. Можно выделить три случая определения таких перемещений.

Это перемещение свободного торцевого сечения при неподвижном другом торцевом сечении, которое численно равно удлинению стержня. Во втором случае это перемещение промежуточного сечения, численно равное удлинению части стержня, заключенной между данным сечением и сечением неподвижным. И, наконец, взаимное перемещение сечений, численно равное удлинению части стержня, заключенной между этими сечениями.

### Напряженное состояние при растяжении (сжатии)

Напряженное состояние при растяжении стержня является одноосным (рис. 3.7, а). Поскольку на поперечных и продольных площадках касательные напряжения не возникают, то эти площадки являются главными.

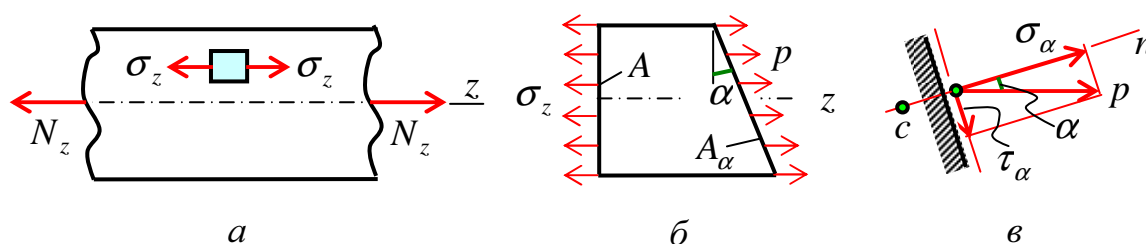


Рис. 3.7

Причем в случае растяжения  $\sigma_1 = \sigma_z > 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , а в случае сжатия  $\sigma_3 = \sigma_z < 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ .

Таким образом, для однородного растянутого стержня ( $N_z = const$ ) напряжения остаются постоянными как по сечению, так и по длине. Такое напряженное состояние называется *однородным*.

Напряжения на площадках, наклоненных к оси стержня под углом  $\alpha$  (рис. 3.7, б), определяются из уравнений равновесия:

$\sigma_z \cdot A = p \cdot A_\alpha$ , где  $A = A_\alpha \cdot \cos \alpha$ , отсюда  $\sigma_z \cdot A_\alpha \cdot \cos \alpha = p \cdot A_\alpha$  или  $p = \sigma_z \cdot \cos \alpha$ . С другой стороны (рис. 3.7, в) имеем  $\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha$  и  $\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha$ . Окончательно имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \sin 2\alpha.$$

Заметим, что касательное напряжение положительно (рис. 3.7, в), если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки  $s$ , лежащей на внутренней нормали к сечению, по часовой стрелке.

Исследуем на экстремум полученные формулы.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \sigma_z \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = 0, \text{ отсюда } \sin 2\alpha = 0, \text{ и } \alpha = 0, \pi/2, \dots. \text{ Таким}$$

образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения ( $\sigma_{\max} = \sigma_z$ ) имеют место в поперечных сечениях стержня (при  $\alpha = 0$ ) и где  $\tau_\alpha = 0$ . Аналогично

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 = 0, \cos 2\alpha = 0, 2\alpha = \pi/2, 3\pi/2, \dots, \text{ т. е., наибольшие}$$

(по абсолютной величине) касательные напряжения ( $\tau_{\max} = 0.5 \cdot \sigma_z$ ) имеют место в сечениях стержня, наклоненных под углом  $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$  к продольной оси, и где  $\sigma_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z$ .

При  $2\alpha = 3\pi/2$ ,  $\tau_\alpha = 0.5 \cdot \sigma_z \cdot \sin(3\pi/2) = -0.5 \cdot \sigma_z$ . Таким образом, касательные напряжения в двух взаимно – перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и обратны по знаку (рис. 3.8).

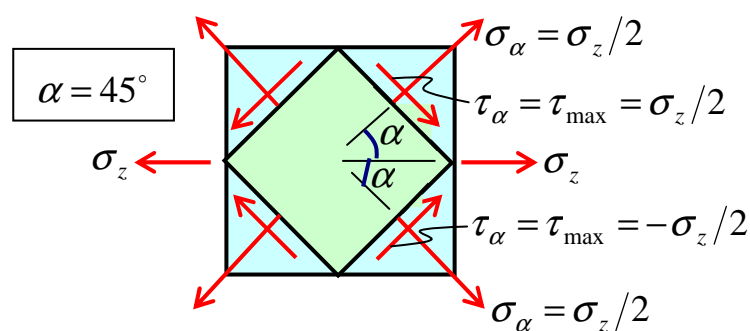


Рис. 3.8

Именно с действием  $\tau_{\max}$  связывается появление на боковой поверхности образца из малоуглеродистой стали, испытываемого на растяжение, линий скольжения, ориентированных под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси образца.

На площадках с экстремальными  $\tau_{\max}$  действуют и нормальные напряжения, равные  $\sigma_\alpha = \sigma_z/2$  (рис. 3.8).